EE5 - resolución de un examen

Calculo I (Universidad de Lima)

UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-2
TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN ESCRITO 5

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- ✓ Forman parte de los criterios de calificación: el procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática.
- ✓ Se permite el uso personal de una calculadora científica básica, no programable ni graficadora.
- ✓ Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- ✓ La prueba consta de 04 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- ✓ Utilizar material de consulta (apuntes manuscritos o impresos).
- ✓ Mantener encendidos y al alcance de la mano el teléfono celular, *smartwatch*, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- ✓ Conversar o hacer consultas durante el desarrollo de la prueba.
- ✓ Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas o de preguntas.
- ✓ Participar en la sustracción, almacenamiento, reproducción o transmisión total o parcial de las preguntas de la prueba, a través de cualquier medio.

Fecha: 02 / 12 / 2024

---

1. En un laboratorio químico, el costo de purificación de una sustancia varia a razón de

$$\frac{69x^2+134x+60}{(3x+2)(3x^2+7x+4)} \quad \text{soles por litro,}$$

donde x representa la cantidad de litros de la sustancia.

a) (4.5 ptos) Si el costo de purificación de 2 litros de sustancia es 224 soles, mediante un método de integración adecuado, halle la función costo $\mathrm{C}(x)$.

En este problema, realice las operaciones con dos cifras decimales.

b) (1.5 ptos) Calcule el costo de purificación de 5 litros de sustancia. Presente su respuesta con dos cifras decimales.

Solución.

a) Se tiene:

$$\mathrm{C}(x) = \frac{69x^2 + 134x + 60}{(3x+2)(3x^2+7x+4)}$$

$$\frac{69x^2 + 134x + 60}{(3x+2)(3x^2+7x+4)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{x+1}$$

$* \ x = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$* \ x = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad B = 6$

$* \ x = -1 \quad \Rightarrow \quad C = 5$

$$\mathrm{C}(x) = \int \frac{69x^2 + 134x + 60}{(3x+2)(3x^2+7x+4)}\,dx = \int \frac{2}{3x+2}\,dx + \int \frac{6}{3x+4}\,dx + \int \frac{5}{x+1}\,dx$$

$\mathrm{C}(x) = \frac{2}{3}\ln|3x+2| + 2\ln|3x+4| + 5\ln|x+1| + K$

$\mathrm{C}(2) = \frac{2}{3}\ln|8| + 2\ln|10| + 5\ln|3| + K$

$$\Rightarrow 11{,}48 + K = 224 \Rightarrow K = 212{,}52$$

Por tanto,

$$\mathrm{C}(x) = \frac{2}{3}\ln|3x+2| + 2\ln|3x+4| + 5\ln|x+1| + 212{,}52$$

b) De acuerdo con el dato:

$$\mathrm{C}(5) = \frac{2}{3}\ln|17| + 2\ln|19| + 5\ln|6| + 212{,}52 \approx 229{,}25$$

El costo de purificación de 5 litros de sustancia costará aproximadamente 229,25 soles.

2. (5 ptos) Utilizando un método de integración adecuado, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^3}{(x^2+5)^{3/2}}\,dx$$

Solución.

$z = x^2 + 5 \Rightarrow dz = 2x\,dx$

$$\int \frac{x^3}{(x^2+5)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+5)^{3/2}}\,2xdx = \int \frac{z-5}{(z)^{3/2}}\cdot dz = \frac{1}{2}\int \left(z^{-1/2} - 5z^{-3/2}\right)dz$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^3}{(x^2+5)^{3/2}}\,dx = z^{1/2} + 5z^{-1/2} + C = (x^2+5)^{1/2} + 5(x^2+5)^{-1/2} + C$$

3. (5 ptos) Utilizando un método de integración adecuado, halle la siguiente integral indefinida

$$\int (8x^3+6x)\ln(2x^2+3)\,dx$$

Solución

$$u = \ln(2x^2+3) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{4x}{2x^2+3}$$

$$dv = (8x^3+6x)dx \Rightarrow v = 2x^4 + 3x^2$$

$$\int (8x^3+6x)\ln(2x^2+3)\,dx = (2x^4+3x^2)\ln(2x^2+3) - \int (2x^4+3x^2)\cdot\frac{4x}{2x^2+3}dx$$

Por tanto,

$$\int (8x^3+6x)\ln(2x^2+3)\,dx = (2x^4+3x^2)\ln(2x^2+3) - \int (2x^2+3)\cdot\frac{4x^3}{2x^2+3}dx$$

$$\int (8x^3+6x)\ln(2x^2+3)\,dx = (2x^4+3x^2)\ln(2x^2+3) - x^4 + C$$

4. (4 ptos) Utilizando un método adecuado de integración, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{3x^2}\ dx$$

Solución

$x = \frac{5}{3}\sec\theta \Rightarrow dx = \frac{5}{3}\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{3x^2} dx = \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta - 25}}{3\left(\frac{5}{3}\sec\theta\right)^2}\frac{5}{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta\ \sec\theta}{\sec^2\theta} d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta} d\theta = \int (\sec\theta - \cos\theta) d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \operatorname{sen}\theta \quad + \quad C$$

$$= \ln\left|\frac{3x}{5} + \frac{\sqrt{9x^2-25}}{5}\right| - \frac{\sqrt{9x^2-25}}{3x} + C$$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{3x^2} dx \ = \ \ln\left|\frac{3x}{5} + \frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{5}\right| - \frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{3x} + C$$

Fórmulas de integración

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a}\right] + C$$

$$\int \sqrt{u^2+a^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|\right] + C$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|\right] + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

Los profesores del curso